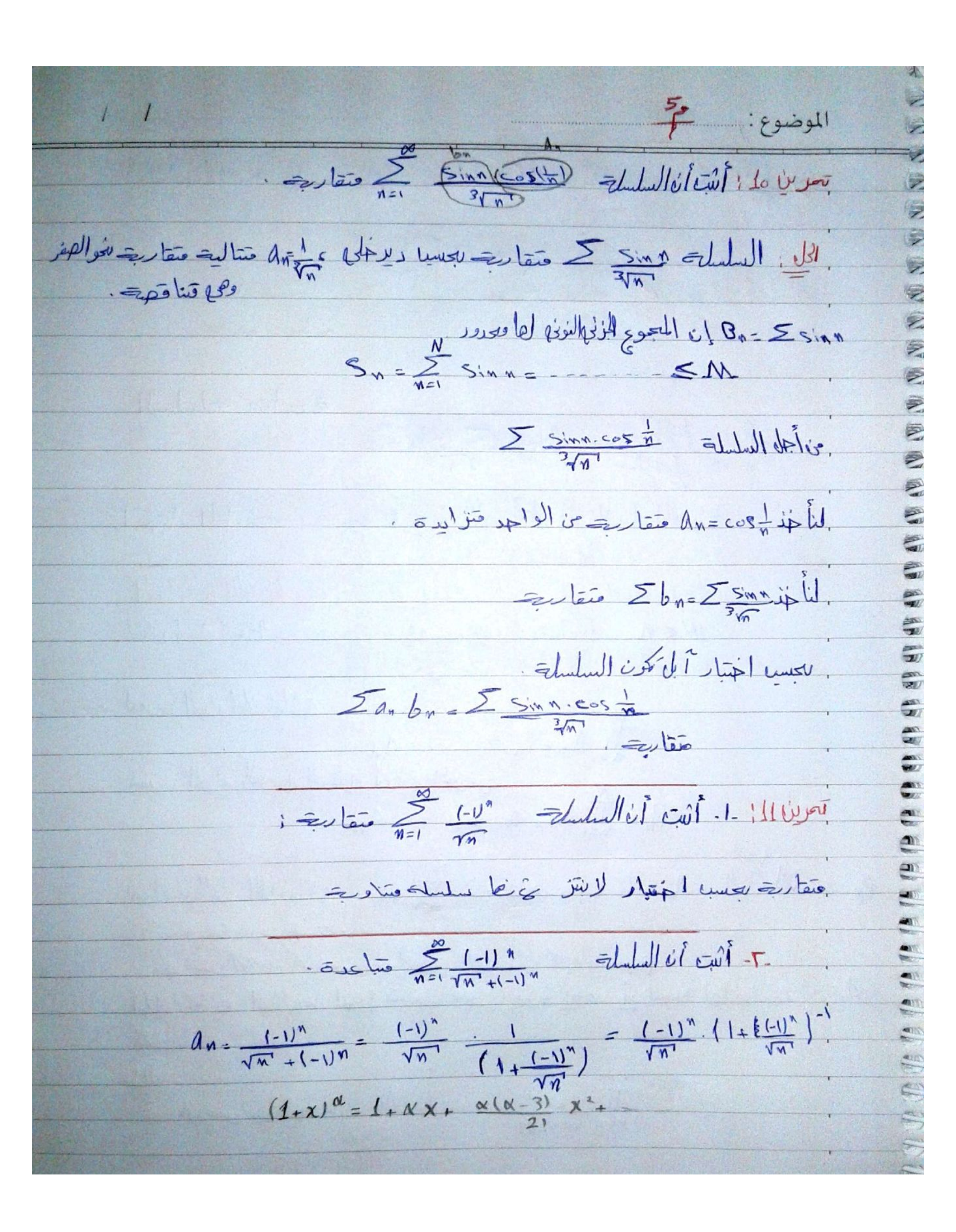


/ / الموضوع : 5م

تمرين 10 : أثبت أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sqrt[3]{n}}$ متقاربة .

الحل: السلسلة $\sum \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}$ متقاربة بحسب ديرخلي ، $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ متتالية متقاربة نحو الصفر وهي متناقصة .

إن المجموع الجزئي النوني لها محدود $B_n = \sum \sin n$

$$S_n = \sum_{n=1}^{N} \sin n = \ldots \le M$$

من أجل السلسلة $\sum \frac{\sin n . \cos \frac{1}{n}}{\sqrt[3]{n}}$

لنأخذ $a_n = \cos\frac{1}{n}$ متقاربة من الواحد متزايدة .

لنأخذ $\sum b_n = \sum \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}$ متقاربة

بحسب اختبار آبل تكون السلسلة

$$\sum a_n b_n = \sum \frac{\sin n . \cos\frac{1}{n}}{\sqrt[3]{n}}$$

متقاربة .

تمرين 11: -1. أثبت أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ متقاربة ؛

متقاربة بحسب اختبار لايبنتز لأنها سلسلة متناوبة

-2. أثبت أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ متباعدة .

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-3)}{2!} x^2 + \ldots$$

/ /   الموضوع:

$$\Rightarrow \frac{(-1)^2}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{(-1)^2}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

حد العام للسلسلة ليست متقاربة — حد عام للسلسلة توافقية متباعدة — متقاربة بحسب ريمان

السلسلة متباعدة

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot(-1)^n}{\sqrt{n}}=1$$

اختبار المقارنة بنهاية لا يصح إلا من أجل السلاسل الموجبة.

الجداءات اللانهائية:

لتكن $\{a_n\}$ متتالية عددية بحيث $a_n\neq 0$ مهما يكن $n\in\mathbb{N}$

نعرف الجداء اللانهائي

$$\prod_{n=1}^{+\infty}a_n=a_1.a_2.\ldots a_n.\ldots$$

نعرف الجداء ~~النونيه الجزئيه~~ الجزئي النوني

$$P_N=\prod_{n=1}^{N}a_n=a_1.a_2\ldots a_N$$

نقول عن الجداء اللانهائي $\prod_{n=1}^{\infty}a_n$ أنه متقارب إذا كان متتالية الجداء الجزئي النوني P_N متقاربة من عدد $\neq 0$.

وفي هذه الحالة تكون قيمة الجداء اللانهائي هي $P\neq 0$.

أما إذا كانت المتتالية $\{P_N\}$ تسعى نحو $\pm\infty$ أو 0 أو ليس لها نهاية يكون الجداء اللانهائي متباعد.

مثال:

ادرس تقارب الجداء اللانهائي $\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$

الموضوع: ....   /   /

الحل: تعريف الجداء الجزئي النوني:

$$P_N = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{2^2}{1\times 3} \cdot \frac{3^2}{2\times 4} \cdot \frac{4^2}{3\times 5} \times \frac{5^2}{4\times 6} \times \frac{6^2}{5\times 7} \times \cdots \times \frac{(N+1)^2}{N(N+2)}$$

$$= 2\left(\frac{N+1}{N+2}\right) \Rightarrow \lim_{N\to\infty} P_N = 2 \neq 0$$

فالجداء متقارب ونتيجته 2.

مبرهنة: لتكن (a_n) متتالية عددية بحيث a_n أكبر تماماً من الصفر يتقارب الجداء اللانهائي $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ إذا وفقط إذا تقاربت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$.

- يمكن الجداء كتابة الجداء اللانهائي بالشكل:

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (1+b_n) \quad ; \quad b_n \neq -1 \;\forall n$$

ملاحظة: إذا كان الجداء اللانهائي $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ متقارب فإن $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.